الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2021

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يُراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 و امرأتان F_1 و F_2.

نعتبر الحوادث A ، B و C حيث: A " عضوا اللجنة من نفس الجنس ".

B " عضوا اللجنة من جنسين مختلفين ".

C " H_1 عضو في اللجنة ".

1) أ. احسب $p(A)$ ، $p(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

ب. بيّن أنّ $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.

2) المتغير العشوائي X يرفق بكلّ إمكانية اختيار لعضوين عدد الرّجال في اللّجنة.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0;1;2\}$.

ب. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$

من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا: $f(x)+f(-x)=2$

2) (u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 2 وأساسها $\frac{1}{3}$ ، نضع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n عبارة S_n هي: $3-\frac{1}{3^{n+1}}$

3) الدّالة العددية g المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\ln(e^x+1)$

تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا $y=2x$ معادلة له.

4) الدّالة العددية h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e^{3x}+\frac{1}{3}$ هي حلّ للمعادلة التفاضلية $y'-3y=1$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -4n+3$

1) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها r وحدّها الأول u_0.

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n = -2n^2 + n + 3$

ب. عيّن قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = -30132$

3) المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = \ln(v_n)$

أ. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4}.

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S'_n = \ln[v_0(1-\frac{1}{2})] + \ln[v_1(1-\frac{1}{3})] + \cdots + \ln[v_n(1-\frac{1}{n+2})]$

احسب S'_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $0,7 < \alpha < 0,8$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2x - 1 + \ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ. بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2-x+1)}$

ب. استنتج أنّ f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty;0[$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;\alpha]$.

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ(C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

4) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النّقطة A ذات الفاصلة 2 ثمّ اكتب معادلة له.

5) بيّن أنّ (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تُحقّق: $-0,5 < \beta < -0,4$

6) ارسم (Δ)، (T) و المنحنى (C). (نأخذ: $f(\alpha) \approx 0,87$).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس، مكتوب على كلّ منها سؤال واحد، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1، 2 و 3، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1، 2، 3 و 4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1 و 2.

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

A "سحب سؤال في الهندسة "، B "سحب سؤال في التحليل " و C "سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا".

1) احسب $p(A)$، $p(B)$ و $P(C)$ احتمال الحوادث A، B و C على الترتيب.

2) احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1.

3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكلّ بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{1;2;3;4\}$.

ب. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرّياضياتي.

جـ. استنتج قيمة $E(2021X+1442)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل.

1) لتكن (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 1 و أساسها 2

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \cdots \times e^{u_n}$. عبارة P_n هي:

أ) $e^{n(n+1)}$ ب) $e^{(n+1)^2}$ جـ) $e^{-n(n+1)}$

2) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$. من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا:

أ) $f(-2-x)=f(x)$ ب) $f(2-x)=f(x)$ جـ) $f(-x)=f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]$ تساوي:

أ) 1 ب) $+\infty$ جـ) 0

4) (w_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما وأساسها عدد حقيقي q موجب تماما و يختلف عن 1

نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=\ln w_n$

(v_n) هي متتالية :

أ) هندسية. ب) حسابية. جـ) لا حسابية و لا هندسية.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأوّل u_0 حيث: $u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3}{8}(u_n+5)$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n<3$

2) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3(3-u_n)$

أ. احسب v_0 ثمّ بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$.

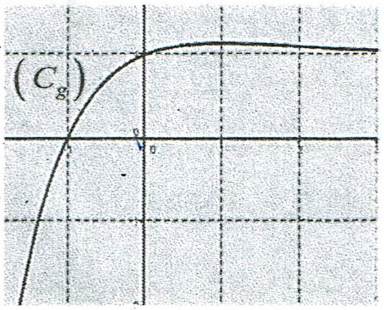
ب. اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = 3-3\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

جـ. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $P_n = (3-u_0)\times(3-u_1)\times\cdots\times(3-u_n)$

احسب P_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + xe^{-x-1}$، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)

1) احسب $g(-1)$.

2) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x-(x+1)e^{-x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) تحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x) = x[1-(1+\frac{1}{x})e^{-x-1}]$

ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $f'(x) = g(x)$

ب. استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا.

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

جـ. بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4) أ. بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث: $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$ و $-1{,}9 < \beta < -1{,}8$

ب. ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثمّ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x) = -|x| + (|x|-1)e^{|x|-1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[-2;0]$: $h(x) = f(x)$

جـ. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: تقني رياضي

دورة: 2021

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأوّل u_0 حيث: $u_0 = 3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + 1$

1) أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n < \frac{9}{2}$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{7}{9}$ ثمّ احسب حدّها الأوّل.

ب. اكتب عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

جـ. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \cdots + \frac{1}{3}u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبريـر.

1) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $a = 3n+2$ ، $b = 5n+1$ و نضع: $d = PGCD(a;b)$

مجموعة القيم الممكنة لِـ d هي:

أ) $\{1;3\}$ ب) $\{1;7\}$ جـ) $\{1;5\}$

2) نضع: $A(\alpha) = \ln(e^{3\alpha}+e^{\alpha}) + \ln(e^{4\alpha}+e^{2\alpha}) + \ln(e^{5\alpha}+e^{3\alpha})$ ، حيث α عدد حقيقي.

من أجل كلّ عدد حقيقي α العبارة المبسطة لِـ $A(\alpha)$ هي:

أ) $6\alpha + \ln(e^{2\alpha}+1)$ ب) $6 + 3\ln(e^{2\alpha}+1)$ جـ) $6\alpha + 3\ln(e^{2\alpha}+1)$

3) حلّ المعادلة التفاضلية $y' = -2y + 4$ الذي يحقق $y(0) = 2021$ هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ:

أ) $h(x) = 2019e^{-2x} + 2$ ب) $h(x) = 2019e^{2x} + 2$ جـ) $h(x) = 2021e^{-2x} - 2$

4) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln(n+2)-\ln(n+1)$

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، المجموع $v_0+v_1+\cdots+v_n$ يساوي:

أ) $-\ln(n+1)$ ب) $\ln(n+2)$ جـ) $1-\ln(n+1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9

2) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9

3) بيّن أنّ العدد $8-2021^{1442}+1691^{1954}$ مضاعف للعدد 9

4) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، العدد $5^{6n}+2021^{6n+1}+1443$ مضاعف للعدد 9

5) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $A_n=2021^{1442}+1691^{1954}+5n$

عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $A_n\equiv 0[9]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2-5+e^{x-1}$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2) أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث: $1{,}71<\alpha<1{,}72$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+1+(-x^2-2x+3)e^{1-x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)e^{1-x}$

ب. استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;\alpha]$

جـ. بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لِـ (C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

3) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لِـ (Δ) في نقطة A يُطلب تعيين فاصلتها **(لا يطلب كتابة معادلة (T))**

4) أ. بين أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $(1+\sqrt{6})$

ب. ارسم (Δ) ، (T) و (C) (نأخذ: $f(\alpha)\simeq 1{,}1$ ، $f(\sqrt{5})\simeq 1{,}4$ و $f(1+\sqrt{6})\simeq 3{,}1$)

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $h(x)=-x+1+(-x^2+2x+3)e^{1+x}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$: $h(x)=f(-x)$

ب. اشرح كيفية رسم (C) انطلاقا من (C_h) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $13x-9y=1 \cdots (E)$ ، ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) أ . تَحقق أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن: $x\equiv 7[9]$

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب. نضع: $A_n=3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3$ حيث n عدد طبيعي.

بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5

3) بفرض أنّ $(x;y)$ حلّ للمعادلة (E) حيث x، و y عددان طبيعيان.

عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n+3^{y-x}+2023^{2022}$ القسمة على 5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ : $f(x)=3x+\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة:	زوجية.	لا زوجية ولا فردية.	فردية.
2) الدّالة العددية g معرّفة على $[0;+\infty[$ بِـ: $g(x)=\dfrac{(x-1)e^x-x+1}{e^x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم. تكون: $y=x+a$ معادلة للمستقيم المقارب المائل لِـ (C) من أجل:	$a=1$	$a=-1$	$a=0$
3) العدد الطبيعي N يُكتب $\overline{3745}$ في نظام تعداد أساسه 8 ويُكتب $\overline{5\alpha 15}$ في نظام تعداد أساسه 7 من أجل:	$\alpha=6$	$\alpha=5$	$\alpha=4$
4) β عدد حقيقي، تكون الأعداد: $e^{\beta}+1$ ، $e^{\beta}+2$ ، $2e^{\beta}$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية من أجل β يساوي:	$\ln(\sqrt{5}-1)$	0	$\ln(1+\sqrt{5})$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بِـ: $u_0=3+e^{-2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n^2-6u_n+12$

1) أ . تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(u_n-3)^2+3$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$

2) أ . ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

ب. استنتج أنّ (u_n) متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يُطلب حساب حدّها الأوّل.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 3 + e^{(-2^{n+1})}$

جـ. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3)$

احسب P_n بدلالة n

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2\ln x - 1 - \dfrac{1}{x^2}$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x - 2 + \dfrac{3 + 2\ln x}{x}$

(C) التمثيل البياني للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ . احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب. بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\dfrac{1}{\alpha}]$ و متناقصة تماما على المجال $[\dfrac{1}{\alpha};+\infty[$

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) أ . احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x-2)]$ ثمّ استنتج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

ب. ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ)

4) بيّن أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1 ثمّ اكتب معادلة لِـ (T) مماس (C) عند A

5) ارسم (T)، (Δ) و (C) (نأخذ: $\dfrac{1}{\alpha} \simeq 0{,}53$ و $f(\dfrac{1}{\alpha}) \simeq 0{,}73$)

6) الدّالة h معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بِـ: $h(x) = |x| + 2 - \dfrac{3 + \ln(x^2)}{|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. تحقق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $h(x) = -f(x)$

جـ. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: رياضيات

دورة: 2021

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=-\frac{3}{2}$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{11u_n+4}{-4u_n+1}$

1) أ . تَحقّق أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=-\frac{11}{4}+\frac{27}{4(-4u_n+1)}$

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $-2<u_n<-1$

جـ. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ثمّ احسب حدّها الأول.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n=\frac{3}{2+4\times 3^n}-2$

جـ. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) أ . تَحقّق أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $\frac{3}{u_n+2}-2=-v_n$

ب. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n=\ln(\frac{3}{u_0+2}-2)+\ln(\frac{3}{u_1+2}-2)+\cdots+\ln(\frac{3}{u_n+2}-2)$

احسب S_n بدلالة n

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 12 كريّة متماثلة لا نفرّق بينها باللمس.

كلّ من الكريّات الاثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية: 1 ، 2 ، 3 ، 4

نسحب عشوائيا كريّة واحدة من الكيس.

نرمز بـ: p_i إلى احتمال سحب كريّة رقمها i، حيث: $p_1=\frac{1}{3}$ ، $p_2=\frac{1}{6}$ ، $p_3=\frac{1}{4}$ و $p_4=\frac{1}{4}$

1) وزّع الكريّات الاثنتي عشرة حسب الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4

2) احسب احتمال كلّ من الحوادث A ، B و C الآتية:

A " سحب كريّة تحمل رقما فرديا "

B " سحب كريّة تحمل رقما من أرقام نظام التّعداد ذي الأساس 4 "

C " سحب كريّة رقمها حلّ للمعادلة: $x^2=2^x$ "

3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكلّ سحب لكرية الرّقم الذي تحمله.

عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرّياضياتي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $42x-y=38 \cdots (E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان.

حلّ المعادلة (E) علما أنّ الثنائية $(1;4)$ حلّ لها.

2) a ، b و c أعداد طبيعية حيث a غير معدوم.

العدد الطبيعي N يكتب $\overline{ab0cb}$ في نظام تعداد أساسه 5 و يكتب $\overline{a7c5}$ في نظام تعداد أساسه 8

أ . بيّن أنّ الأعداد a ، b و c تُحقّق: $113a=3(c-42b+151)$ ثمّ استنتج أنّ: $a=3$

ب. جِدْ العددين الطبيعيين b و c ثمّ اكتب العدد N في النّظام العشري.

3) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 6

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $2021^{2n}+1441^n+4$ مضاعف للعدد 6

جـ. نضع: $A_n=2021^{2n}+1441^n+2\times 1442^n$

جِدْ قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[6]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x^2-3)e^x+3$

1) ادرس تغيّرات الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1{,}53<\alpha<1{,}54$

ب. احسب $g(0)$ ثمّ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x+1+(x^2-2x-1)e^x$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ . بيّن أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج أنّ f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;\alpha]$

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) أ . بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=3x+1$ مقارب مائل لـ(C) عند $-\infty$

ب. ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

جـ. بيّن أنّ (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تُحقّق: $2{,}03<\beta<2{,}04$

د. بيّن أنّ (C) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين لِـ (Δ) (لا يُطلب كتابة معادلة لِـ (T) و (T'))

4) ارسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C) على $]-\infty;1+\sqrt{2}]$

(نأخذ: $\alpha=1{,}53$ ، $f(\alpha)=-2{,}3$ ، $f(\sqrt{3})=-2{,}1$ و $f(-\sqrt{3})=-3{,}2$)

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=f[\ln(x)]$

أ . احسب $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

ب. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة h ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}$

1) أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $0<u_n<2$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n^2-4$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب حساب حدّها الأوّل.

ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n=\sqrt{4-3(\frac{1}{2})^n}$

جـ. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n=u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2$

أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n=\dfrac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n}-2$

ب. بيّن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $PGCD(2^n;3+n\times 2^{n+2})=PGCD(2^n;3)$

جـ. استنتج أنّ: $PGCD(2^n;3+n\times 2^{n+2})=1$

د. جِد قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $S_n=\dfrac{83}{8}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يُراد عشوائيا تشكيل لجنة تضمّ رئيسا ونائبا له من بين ثلاثة رجال H_1، H_2، H_3 و أربع نساء F_1، F_2، F_3، F_4

1) بيّن أنّ عدد اللّجان التي يمكن تشكيلها هو 42

2) نعتبر الحوادث الآتية: A "اللّجنة من نفس الجنس" B "اللّجنة من جنسين مختلفين"

C "H_1 هو الرئيس" E "اللّجنة لا تضم كلاّ من H_1 و F_1"

أ . احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثمّ استنتج $P(B)$

ب. احسب $P(C)$ و $P(E)$

3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكلّ لجنة عدد الرّجال فيها.

عيّن قانون احتمال X ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرّياضياتي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x-6y=1\ldots(E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان.

أ . حلّ المعادلة (E) علما أنّ الثّنائية $(1;1)$ حلّ لها.

ب. تحقّق أنّه إذا كانت الثّنائية $(x;y)$ حلاّ للمعادلة (E) فإنّ xy عدد طبيعي غير معدوم.

2) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7

ب. بيّن أنّ العدد $4\times 2019^{2021}+2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n: $4^n \equiv 4[6]$

4) نفرض أنّ الثّنائية $(a\,;b)$ حلّ للمعادلة (E)

A عدد طبيعي يُكتب في نظام التّعداد ذي الأساس 4 على الشّكل: $\overline{333\cdots330}$ (عدد أرقامه $a\times b$)

أ . بيّن أنّ: $A=4^{ab}-4$

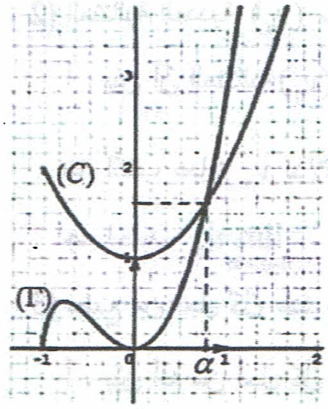
ب. تحقّق أنّ: $A\equiv 0[6]$ ثمّ عيّن كلّ الثّنائيات $(a\,;b)$ التي من أجلها يكون A قابلا للقسمة على 42

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

في الشّكل المقابل (C) و (Γ) هما على التّرتيب التّمثيلان البيانيان للدّالتين العدديتين المعرّفتين على المجال $]-1\,;+\infty[$ بـ:

$x\mapsto 1+x^2$ و $x\mapsto 2x(1+x)\ln(1+x)$



(C) و (Γ) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α تُحقّق: $0{,}78<\alpha<0{,}79$

الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$$

1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x من المجال $]-1\,;+\infty[$ وضعية (C) بالنسبة إلى (Γ)

2) استنتج حسب قيم x من المجال $]-1\,;+\infty[$ إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة: $2cm$)

1) أ . احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ و بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب. فسّر النّهايتين هندسيا.

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ x من المجال $]-1\,;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ. بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ ثمّ استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

د. اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند المبدأ O

3) ارسم (T) و (C_f) (نأخذ: $f(\alpha)=0{,}36$)

4) الدّالة العددية h معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\dfrac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. بيّن أنّ الدّالة h غير قابلة للاشتقاق عند الصفر ثمّ فسّر ذلك بيانيا.

جـ. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني